6. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung

Eigenwertverfahren und Modellbildung

1 Eigenwertverfahren, Karhunen-Loève-Transformation (KLT)

Ziel der Karhunen-Loève-Transformation ist es, Signale zu approximieren, die als stochastischer Prozess modelliert werden. Dabei soll eine signalabhängige Transformation basierend auf den Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix des Signals durchgeführt werden. Anwendungen sind die Beschreibung von gestörten Messsignalverläufen und die effektive Signalkodierung bei der Datenübertragung. Obwohl die Signale in der Praxis einen konkreten deterministischen Informationsgehalt haben, erlaubt diese Modellierung ein allgemeines Vorgehen für verschiedene Anwendungen.
Gegeben sei ein reeller, zeitdiskreter und mittelwertfreier Zufallsprozess $\mathbf{x}$. Der stochastische Prozess ist der Vektor der Abtastwerte

$$\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^T ,$$

der sich mit der orthonormalen Basis

$$\boldsymbol{\Phi} = \left[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\right]$$
$$\left\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j \right\rangle = \delta_{ij} , \quad \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}^* = \mathbf{I}$$

in

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{b}$$

abbilden lässt.
Die Koeffizienten b_i berechnen sich über das Innenprodukt

$$b_i = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\varphi}_i^* = \boldsymbol{\varphi}_i^H \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\Phi}^H \cdot \mathbf{x} .$$

Hierbei steht $\boldsymbol{\Phi}^H$ für $\boldsymbol{\Phi}^{T*}$. Bei der Karhunen-Loève-Transformation sollen die Koeffizienten b_i *unkorreliert* sein

$$E\left\{b_i b_j^*\right\} = \lambda_j \, \delta_{ij} .$$

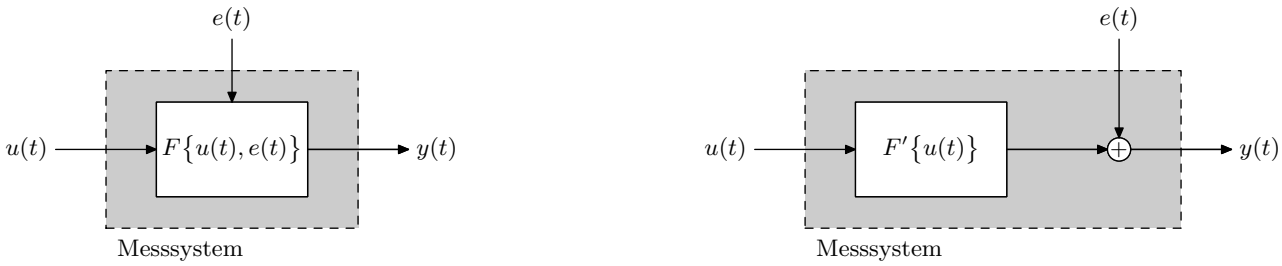
Dies führt auf folgende Gleichung

$$\mathbf{R}_{xx} \, \boldsymbol{\varphi}_j = \lambda_j \, \boldsymbol{\varphi}_j ,$$

die die *Eigenwertgleichung der Autokorrelationsmatrix* darstellt.
$\mathbf{R}_{xx}$ ist symmetrisch. Es existieren nur reelle, nicht-negative Eigenwerte $\lambda_j \geq 0$. $\mathbf{R}_{xx}$ ist positiv definit oder positiv semidefinit. Bei m-fachen Eigenwerten kann man die dazugehörigen m linear unabhängigen Eigenvektoren in eine orthonormale Basis überführen (z.B. mit Gram-Schmidt-Verfahren). Insgesamt gibt es damit n Eigenvektoren, die orthonormal zueinander sind: Basis $\boldsymbol{\varphi}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2 Modellbildung

Jeder Signalverarbeitung geht zunächst die Messung der zu betrachtenden physikalischen Größe voraus. In Abbildung 1(a) ist ein allgemeines Messsystem dargestellt, Abbildung 1(b) zeigt den häufig auftretenden (bzw. vorausgesetzten) Sonderfall einer additiv überlagerten Störung $e(t)$. Hierbei ist $u(t)$ die zu messende Größe, $y(t)$ ist das Messergebnis, das zur Verfügung steht. Dieses weicht bei realen Messsystemen selbst dann von $u(t)$ ab, wenn keine äußeren Störungen $e(t)$ auftreten.
Das Ziel einer guten Signalverarbeitung ist es, zunächst aus den gemessenen Größen $y(t)$ die wahre physikalische Größe $u(t)$ mithilfe von Schätzalgorithmen so gut wie möglich zu rekonstruieren.



(a) Allgemeines Messsystem

(b) Messsystem mit additiv überlagerter Störung

Abbildung 1: Messung einer physikalischen Größe

Um dabei möglichst gute Ergebnisse erzielen zu können, sollte unbedingt das *gesamte* Wissen verwendet und in Form eines *Modells* formuliert werden:

- Wissen über den erwarteten Signalverlauf (z. B. konstant, linear, sinusförmig)
- Wissen über Verfälschungen durch das Messsystem
- Wissen über externe Fehlereinflüsse

2.1 Lineares Signalmodell

Beim linearen Signalmodell wird das gemessene Ausgangssignal $y(t)$ durch eine Linearkombination aus verschiedenen Basisfunktionen beschrieben. Unter der Voraussetzung eines additiv überlagerten Fehlers ist das Signalmodell somit durch

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \varphi_k(t) + e(t)\,.$$

gegeben. Dabei ist K gleich der Anzahl der Parameter bzw. der Basisfunktionen. Beim Übergang zum zeitdiskreten Fall ergibt dies:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \varphi_k(n) + e(n)\,.$$

Stehen zur Auswertung N vergangene Messungen zur Verfügung, werden die N Messgleichungen des Signalmodells in Vektorschreibweise zusammengefasst:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e}(n)\,.$$

Dabei sind:

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y(n) & y(n-1) & \dots & y(n-N+1) \end{bmatrix}^T \qquad \text{Messvektor}$$

$$\mathbf{e}(n) = \begin{bmatrix} e(n) & e(n-1) & \dots & e(n-N+1) \end{bmatrix}^T \qquad \text{Störvektor}$$

$$\mathbf{\Phi}(n) = \begin{bmatrix} \varphi_0(n) & \varphi_1(n) & \dots & \varphi_{K-1}(n) \\ \varphi_0(n-1) & \varphi_1(n-1) & \dots & \varphi_{K-1}(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(n-N+1) & \varphi_1(n-N+1) & \dots & \varphi_{K-1}(n-N+1) \end{bmatrix} \qquad \text{Beobachtungsmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{K-1} \end{bmatrix}^T \qquad \text{Parametervektor}$$

Der Parametervektor $\mathbf{b}$ darf nicht von der Zeit (also n) abhängen. Die zeitabhängigen Elemente müssen in der Beobachtungsmatrix $\mathbf{\Phi}(n)$ stehen.

2.2 Fehlermodell

Bei einfachen Fehlern können oft auch schon mit einfachen Maßnahmen gute Ergebnisse erzielt werden. Dazu zählen:

- **Fehlerkompensation** bei bekanntem Fehler
- **Mittelwertbildung** bei additiv überlagertem mittelwertfreiem Fehler.

Bei einem bestimmten zu erwartenden Verlauf des Fehlers (z. B. konstanter Offset, Drift etc.), kann dieses Wissen in das Signalmodell integriert werden.
Als einfachstes Modell für ein stochastisches Fehlersignal $e(t)$ wird häufig weißes Rauschen angenommen. Dieses ist mittelwertfrei und unkorreliert.

$$E\{e(t)\} = 0 \qquad r_{ee}(\tau) = \sigma_e^2 \cdot \delta(\tau) \qquad \text{bzw.}$$

$$E\{\mathbf{e}(n)\} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{R}_{ee}(n) = E\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^T(n)\} = \sigma_e^2 \cdot \mathbf{I}$$

Eine Verfeinerung stellt die Modellierung als Markov-Prozess (farbiges Rauschen) dar. Hierbei wird angenommen, dass das Fehlersignal $e(t)$ bzw. $e(n)$ als Ausgangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems erster Ordnung entsteht, das von weißem Rauschen $w(t)$ angeregt wird (siehe Abb. 2):

$$e(n) = a \cdot e(n-1) + w(n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; E(z) = \frac{z}{z-a} \cdot W(z)$$

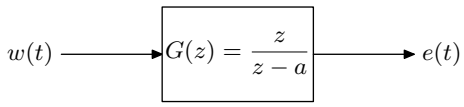


Abbildung 2: Markov-Prozess als Fehlermodell

Für die Autokorrelation des Fehlersignals gilt dann:

$$r_{ee}(k) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} \cdot a^{|k|} = \sigma_e^2 \cdot a^{|k|} \qquad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{R}_{ee} = \sigma_e^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{N-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a^{N-1} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Parameterschätzverfahren I

1 Beurteilung von Schätzern

Die drei wesentlichen Merkmale oder Eigenschaften zur Beurteilung von Schätzern sind:

- **Erwartungstreue:** $E\{\hat{\mathbf{b}}\} = \mathbf{b}$
  Bei einem erwartungstreuen Schätzer ist der Erwartungswert des geschätzten Parametervektors $\hat{\mathbf{b}}$ gleich dem wahren Parametervektor $\mathbf{b}$, unabhängig von der Anzahl N der berücksichtigten Messwerte.

- **Effizienz:** $\mathbf{C}_{\tilde{b}\tilde{b}} = E\{(\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}})(\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}})^T\} \rightarrow$ min mit Schätzfehler $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}$
  Ein Schätzer heißt *effizient* (oder auch *wirksam*), wenn er die minimal mögliche Schätzfehlerkovarianz $\mathbf{C}_{\tilde{b}\tilde{b}}$ besitzt.

- **Konsistenz:** $\lim\limits_{N\to\infty} E\left\{\hat{\mathbf{b}}\right\} = \mathbf{b}$, $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{C}_{\tilde{b}\tilde{b}} = \mathbf{0}$
  Ein Schätzer heißt *konsistent*, wenn der Schätzwert bei einer Zunahme der Anzahl der Messungen gegen den wahren Wert konvergiert.

Anmerkungen

- Die Erwartungstreue ist eine wünschenswerte Eigenschaft. Allerdings kann es je nach Problemstellung Schätzer geben, die nicht erwartungstreu sind (wohl aber konsistent), jedoch bessere Konvergenzeigenschaften aufweisen als jeder erwartungstreue Schätzer, d. h. der quadratische Schätzfehler geht mit Zunahme der verfügbaren Messwerte schneller gegen Null.

- Die Eigenschaft $\lim\limits_{N\to\infty} E\left\{\hat{\mathbf{b}}\right\} = \mathbf{b}$ heißt *asymptotische Erwartungstreue*. Jeder erwartungstreue Schätzer ist auch asymptotisch erwartungstreu, aber nicht umgekehrt.

- Jeder konsistente Schätzer ist zumindest asymptotisch erwartungstreu.

- Es gibt Schätzer, die erwartungstreu, aber nicht konsistent sind. Diese können für eine kleine Anzahl an Messwerten gute Ergebnisse liefern; ist eine größere Anzahl an Messwerten verfügbar, ist ein konsistenter Schätzer vorzuziehen, sofern ein solcher existiert.

2 Least-Squares-Schätzer

Ausgangspunkt für den Least-Squares-Schätzer ist das lineare Signalmodell

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e}(n)\,.$$

Als Modell für den Messfehler $e(n)$ wird ein weißer Gaußscher Rauschprozess mit der Varianz σ_e^2 angenommen. Der geschätzte Parametervektor $\hat{\mathbf{b}}$ wird so berechnet, dass er die quadratische Norm

$$\|\mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n)\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |y(n-i) - \hat{y}(n-i)|^2 \rightarrow \text{min}$$

minimiert. Dieser Ansatz führt auf die Schätzgleichung

$$\boxed{\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}\,.}$$

Wenn der Fehler $e(n)$ mittelwertfrei ist, so ist der Least-Squares-Schätzer erwartungstreu. Die Matrix $\mathbf{G} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T$ wird auch als *Moore-Penrosesche Pseudoinverse* bezeichnet, da $\mathbf{G}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$ gilt.
Der Schätzfehler lautet

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}\,.$$

Dies führt auf die Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{\tilde{b}\tilde{b}} = E\{\tilde{\mathbf{b}}\,\tilde{\mathbf{b}}^T\} = \mathbf{G}\;\mathbf{C}_{ee}\mathbf{G}^T\,.$$

Aufgabe 1: Hauptkomponentenanalyse

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X}$ mit den Beobachtungen

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3{,}5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Schätzen Sie die Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{xx}$ und die Autokovarianzmatrix $\mathbf{C}_{xx}$ aus den Beobachtungen $\mathbf{x}_i, \quad i = 1{,}2{,}3{,}4$.

b) Diagonalisieren Sie die Autokovarianzmatrix $\mathbf{C}_{xx}$, d. h. bringen Sie sie in die Form $\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^T$ mit $\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{I}$ und $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1{,}\lambda_2)$.

Aufgabe 2: Polynomförmiges Signal

Ein Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v_0 wird mit der konstanten Verzögerung a ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ abgebremst. Dabei wird die zurückgelegte Strecke s (Bremsweg) ab dem Zeitpunkt t_0 zeitdiskret gemessen. Die Abtastzeit beträgt $t_A = T$. Der Messung ist ein mittelwertfreies Rauschen überlagert. Stellen Sie das Signalmodell auf.

Aufgabe 3: Kapazitätsmessgerät

Bei einer Kapazitätsmessung eines Kondensators wird der ungeladene Kondensator $Q(0) = 0$ mit unbekannter Kapazität C ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ über eine ideale Konstantstromquelle mit dem Strom i_C aufgeladen. Bekanntlich ist der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator gegeben durch:

$$i_\mathrm{c}(t) = C\frac{d}{dt}u_\mathrm{C}(t)$$

Durch Messung der Spannung $u_\mathrm{C}(t)$ am Kondensator soll auf die Kapazität C geschlossen werden. Bei der Messung treten zwei additive Störungen auf:

1. Dem Messsignal ist ein deterministisches Netzbrummen der Frequenz $50\,\mathrm{Hz}$ mit unbekannter Amplitude und unbekannter Phase überlagert.

2. Dem Messsignal ist außerdem weißes Rauschen überlagert.

a) Zeichen Sie ein Strukturbild des Modells.

b) Stellen Sie das zeitkontinuierliche Modell der Messwerte $y(t)$ auf.

c) Stellen Sie nun das zeitdiskrete lineare Signalmodell für die Abtastzeit T auf.

Hinweis: Zur Vereinfachung wird im Folgenden eine andere Indizierung des linearen Signalmodells verwendet:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T(0) \\ \mathbf{\Phi}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{\Phi}^T(N-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{K-1} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Mehrere Störquellen

Eine Gleichspannungsquelle u soll mittels eines LS-Schätzers überwacht werden. Dazu werden N Messwerte $y(n)$ aufgenommen. Das gemessene Signal besteht aus dem Nutzsignal u und zwei deterministischen Störungen $e_1(n)$, $e_2(n)$ sowie dem stochastischen Fehler $e_3(n)$:

$$y(n) = u + e_1(n) + e_2(n) + e_3(n)\,, \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Die deterministischen Störungen werden durch zwei Impulse verursacht, von denen zwar die Zeitpunkte ihres Auftretens n_1 bzw. n_2, nicht aber deren Höhe h_1 bzw. h_2 bekannt sind:

$$e_i(n) = h_i \cdot \delta(n - n_i)\,, \quad i = 1{,}2$$

Die Störungen sind sowohl voneinander als auch vom Nutzsignal unabhängig. Die stochastische Störung wird als weißes Rauschen angenommen.

a) Geben Sie zunächst einen LS-Schätzer für die Gleichspannung an, *ohne* die deterministischen Störungen zu berücksichtigen.

b) Beziehen Sie nun den Fehler e_1 in Ihr Modell ein und berechnen Sie erneut den LS-Schätzer.

c) Wie lautet das Modell, wenn alle deterministischen Störungen berücksichtigt werden? Berechnen Sie auch hierzu den LS-Schätzer.

d) Geben Sie die Erwartungswerte für jeden der drei Schätzer an.